Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Abril - Agosto 2002

Nombre: ______________________

Carnet: ______________ Sección: _____

MA-1116—Tercer Parcial (35 puntos.) —

1. En (a), (b), (c) y (d), para cada uno de los problemas planteados marque la respuesta correcta justificando su selección. (12 pts; 3pts.,c/u)

   a) Dado el producto interno sobre P_2, $(p,q) = \int_0^1 xp(x)q(x)dx$ para $p,q \in P_2$, entonces $\|x\|$ es igual a

   $$\square\ 2 \quad \square\ 1/2 \quad \square\ 1/4 \quad \square\ 4$$

   b) Para $\vec{x} = (x_1, x_2)$ e $\vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ se define el siguiente producto interno en $\mathbb{R}^2 (\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + 3x_2y_2$. Si $H = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, entonces $H^{\perp}$ es igual a

   $$\square\ gen\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad \square\ gen\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \square\ gen\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\} \quad \square\ gen\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

   c) Si una base ortonormal para H es $\left\{\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ y el producto interno en $\mathbb{R}^3$ es el producto escalar común, entonces para $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ se tiene que $proy_H\vec{v}$ es

   $$\square\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \square\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \square\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   d) Si 3 es un autovalor de A^{-1}, entonces un autovalor de A es

   $$\square\ \sqrt{3} \quad \square\ \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \square\ \frac{1}{3} \quad \square\ 3$$

2. Dada la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, se sabe que (8 puntos.)
   $T(\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ ) = (\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ )$, $T(\ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ ) = (\ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ )$.
   $T(\ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ ) = (\ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 0\ )$, y $T(\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ ) = (\ 0\ \ -1\ \ 1\ \ 0\ )$,

   a) halle la imagen por T de vector $(\ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ )$. (3 puntos)

   b) Hallar la matriz asociada a T para base canónica. (2 puntos)

   c) Encuentre el rango y la nulidad de T. (3 puntos)

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (9 puntos)

   a) Halle sus autovalores y sus espacios propios asociados. (4 puntos)

   b) Explique si A es diagonalizable o no. (2 puntos)

   c) En caso de ser A diagonalizable escriba la matriz diagonalizante C y la matriz diagonal D. (1 punto)

   d) Explique por qué la matriz diagonal (si existe) es semejante a la matriz A. (2 puntos)

4. Dada Dada la función (6 puntos)

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix} x^2 & + & y \\ y & - & z \end{pmatrix} \end{array}$$

   determine si es una transformación lineal o no.